

# SESSION 2006

**Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes  
de l'Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg**

**Épreuves écrites**

## MATHÉMATIQUES

**Durée : 2 heures - Coefficient : 2**

Note : cette épreuve comprend deux exercices indépendants.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

**Les calculatrices ne sont pas autorisées.**

## EXERCICE I

$E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension 3.

On désigne par  $Id_E$  l'endomorphisme identité de  $E$ .

Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , le noyau de  $u$  est noté  $\text{Ker}(u)$ .

Soient  $B = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$  et  $v$  le vecteur de  $E$  tel que :  $v = e_1 - e_2 + e_3$ .

On désigne par  $f$  l'application de  $E$  vers  $E$  telle que pour tout vecteur  $x$  de  $E$  :

$$f(x) = x - 2(x_1 + x_2 + x_3)v$$

où  $(x_1, x_2, x_3)$  sont les coordonnées de  $x$  dans la base  $B$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Ecrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $B$ .
3. Calculer  $A^2$ . En déduire que  $A$  est inversible et donner  $A^{-1}$ .
4. Soient  $f_1$  et  $f_2$  les endomorphismes de  $E$  définis par :  $f_1 = f - Id_E$  et  $f_2 = f + Id_E$ .
  - a. Déterminer une base de  $\text{Ker}(f_1)$  et de  $\text{Ker}(f_2)$ .
  - b. Montrer que  $E = \text{Ker}(f_1) \oplus \text{Ker}(f_2)$ .

## EXERCICE II

### A. Etude des intégrales de Wallis

On considère la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ .

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .

3. En déduire que pour tout entier naturel  $p$  :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(p!)^2} \frac{\pi}{2^{2p+1}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!} 2^{2p}.$$

4. Etablir pour tout entier naturel  $n$ , l'encadrement :  $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ .

5. En déduire que  $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$  puis que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{4p} (p!)^4}{(2p)!^2 p} = \pi.$$

### B. Formule de Stirling

On considère maintenant, la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n$  strictement positif par :  $u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ .

1. Montrer que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}$  puis que  $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

2. Montrer qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $-\frac{1}{n^2} \leq \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 0$ .

3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est monotone à partir du rang  $n_0$ .

4. a. Vérifier que pour tout entier  $k > 1$ ,  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

b. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier  $n > 1$  par  $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$ .

Montrer que la suite  $(v_n)$  est bornée.

5. Déduire de ce qui précède que la suite  $(u_n)$  est bornée et converge vers un réel strictement positif  $\alpha$ .

6. En vous appuyant sur le résultat de la question 5. de la partie A, déterminer  $\alpha$  et établir la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$



SESSION 2006

Concours d'admission en première année du Cycle de formation d'Architectes  
de l'Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg

Epreuves écrites

PHYSIQUE

Durée : 2 heures – Coefficient : 2

Instructions à lire avant de remplir le document réponse :

L'épreuve est un questionnaire à choix multiples (QCM). Une bonne réponse rapporte un point et une mauvaise réponse est sanctionnée par le retrait d'un point. En cas de doute, il vaut donc mieux ne rien répondre. Chaque question admet une réponse unique. On cochera ainsi une seule case par question traitée.

L'unique document à rendre est le document réponse qu'on aura rempli avec soin.

1. Une boule de métal de masse  $m = 2 \text{ kg}$  attachée à une corde de longueur  $L = 0,6 \text{ m}$  tourne à la vitesse angulaire  $\omega = 50 \text{ tours.mn}^{-1}$  en décrivant un cercle vertical. On donne  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

Calculer la tension de la corde quand :

1.1. la boule est au point le plus haut de sa trajectoire ;

A : 6,6 N      B : 13,3 N      C : 18,6 N      D : 27,9 N

1.2. la corde est horizontale ;

A : 13,3 N      B : 26,6 N      C : 32,9 N      D : 39,9 N

1.3. la boule est au plus bas de sa trajectoire.

A : 41,5 N      B : 52,5 N      C : 63,8 N      D : 79,0 N

1.4. Calculer la vitesse linéaire que doit avoir la boule au point le plus haut de sa trajectoire afin que la tension de la corde y soit nulle.

A : 1,78  $\text{m.s}^{-1}$       B : 2,07  $\text{m.s}^{-1}$       C : 2,42  $\text{m.s}^{-1}$       D : 2,89  $\text{m.s}^{-1}$

2. On soumet un condensateur de capacité  $C_1 = 2 \mu\text{F}$  à une tension  $U = 1000 \text{ V}$ . On relie ensuite ses bornes à celles d'un condensateur non chargé de capacité  $C_2 = 1 \mu\text{F}$ .

2.1. Calculer la charge initiale du système ;

A :  $0,67 \cdot 10^{-3} \text{ C}$       B :  $1,33 \cdot 10^{-3} \text{ C}$       C :  $1,67 \cdot 10^{-3} \text{ C}$       D :  $2,00 \cdot 10^{-3} \text{ C}$

2.2. Calculer la tension aux bornes de chaque condensateur ( $U_1$  aux bornes de  $C_1$  et  $U_2$  aux bornes de  $C_2$ ) après les avoir connectés ;

A :  $U_1 = 500 \text{ V}$  et  $U_2 = 1000 \text{ V}$       B :  $U_1 = 1000 \text{ V}$  et  $U_2 = 500 \text{ V}$   
 C :  $U_1 = 750 \text{ V}$  et  $U_2 = 750 \text{ V}$       D :  $U_1 = 667 \text{ V}$  et  $U_2 = 667 \text{ V}$

2.3. Calculer l'énergie finale du système ;

A :  $0,34 \text{ J}$       B :  $0,5 \text{ J}$       C :  $0,66 \text{ J}$       D :  $1,00 \text{ J}$

2.4. Calculer la perte d'énergie qui a eu lieu lors du branchement.

A :  $0,34 \text{ J}$       B :  $0,5 \text{ J}$       C :  $0,66 \text{ J}$       D :  $1,00 \text{ J}$

3. On dispose d'un disque homogène de masse  $M = 0,4 \text{ kg}$  et de rayon  $R = 0,1 \text{ m}$ . On suspend ce disque par son centre  $O$  à un fil de torsion vertical fixé à sa partie supérieure en un point  $O'$ . A partir de sa position d'équilibre, on fait tourner le disque autour de  $OO'$  d'un angle  $\alpha_m = 1 \text{ rad}$ , dans un sens choisi comme sens positif, puis on l'abandonne, sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0$ . On mesure la période des oscillations qui vaut  $T = 2 \text{ s}$ . On néglige les frottements.

3.1. Calculer le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution.

A :  $10^{-3} \text{ kg.m}^2$       B :  $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$       C :  $2 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$       D :  $4 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$

3.2. Etablir l'équation horaire de mouvement pris par le disque.

A :  $\alpha(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$       B :  $\alpha(t) = \sin(\pi \cdot t)$       C :  $\alpha(t) = \cos(\pi \cdot t)$       D :  $\alpha(t) = \cos(2\pi \cdot t)$

3.3. Calculer la vitesse angulaire du disque lors d'un passage par la position d'équilibre.

A :  $1 \text{ rad.s}^{-1}$       B :  $\frac{\pi}{4} \text{ rad.s}^{-1}$       C :  $\frac{\pi}{2} \text{ rad.s}^{-1}$       D :  $\pi \text{ rad.s}^{-1}$

3.4. Calculer l'énergie cinétique du disque lors d'un passage par la position d'équilibre.

A :  $10^{-2} \text{ J}$       B :  $2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$       C :  $3 \cdot 10^{-2} \text{ J}$       D :  $5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$

3.5. Calculer la constante de torsion du fil.

A :  $0,5 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.rad}^{-1}$       B :  $1 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.rad}^{-1}$       C :  $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.rad}^{-1}$       D :  $2 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.rad}^{-1}$

3.6. Comment se répartissent l'énergie potentielle et l'énergie cinétique lorsque  $\alpha = \alpha_m/2$  ?

A :  $E_c = E_p$       B :  $E_c = \frac{1}{2} E_p$       C :  $E_c = 2E_p$       D :  $E_c = \frac{1}{3} E_p$       E :  $E_c = 3E_p$

4. On considère trois boules de rayon  $R$  portant la même charge électrique totale  $Q$  supposée positive mais avec des distributions de charge différentes. La boule 1 a une densité de charge constante  $\rho$  dans tout le volume. La charge électrique de la boule 2 est uniformément répartie sur sa surface. La boule 3 a une densité de charge qui décroît monotonement du centre vers la surface. L'indice  $i$  est relatif à la boule  $i$ .

4.1. On compare les champs électriques des trois boules à la distance  $r = 2R$  du centre de chaque boule.

A :  $E_1 < E_2 < E_3$       B :  $E_1 = E_2 = E_3$       C :  $E_2 < E_1 < E_3$       D :  $E_3 < E_2 < E_1$

4.2. On compare les champs électriques à la distance  $r = R/2$  du centre de chaque boule.

A :  $E_1 < E_2 < E_3$       B :  $E_1 = E_2 = E_3$       C :  $E_2 < E_1 < E_3$       D :  $E_3 < E_2 < E_1$

4.3. On compare les énergies potentielles électrostatiques des 3 boules.

A :  $W_1 < W_2 < W_3$       B :  $W_1 = W_2 = W_3$       C :  $W_2 < W_1 < W_3$       D :  $W_3 < W_2 < W_1$

4.4. On compare le potentiel électrique au centre de chacune des 3 boules (en prenant le potentiel nul à l'infini).

A :  $V_1 < V_2 < V_3$       B :  $V_1 = V_2 = V_3$       C :  $V_2 < V_1 < V_3$       D :  $V_3 < V_2 < V_1$

5. L'état initial d'une mole de gaz parfait est caractérisé par  $P_0 = 2 \cdot 10^5$  Pa et  $V_0 = 14 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup>. On fait subir à ce gaz successivement :

- une détente isobare qui double son volume ;
- une compression isotherme qui le ramène à son volume initial ;
- un refroidissement isochore qui le ramène à l'état initial.

On donne la constante des gaz parfaits :  $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}$ .

5.1. La compression isotherme s'effectue à la température suivante ;

A : 337 K      B : 501 K      C : 673 K      D : 867 K

5.2. La pression maximale atteinte vaut :

A :  $4 \cdot 10^5$  Pa      B :  $5 \cdot 10^5$  Pa      C :  $6 \cdot 10^5$  Pa      D :  $7 \cdot 10^5$  Pa

5.3. Le travail échangé au cours de la détente isobare vaut :

A : -1400 J      B : 1400 J      C : 0      D : - 2800 J      E : 2800 J

5.4. Le travail échangé au cours de la compression isotherme vaut :

A : -2145 J      B : 2145 J      C : 0      D : - 3864 J      E : 3864 J

5.5. Le travail échangé au cours du refroidissement isochore vaut :

A : - 1123 J      B : 1123 J      C : 0      D : - 2387 J      E : 2387 J

5.6. La quantité de chaleur échangée au cours du cycle vaut :

A : - 1064 J      B : 1064 J      C : 0      D : - 1954 J      E : 1954 J

Fin de l'épreuve.



Session 2006

Concours d'admission en première année  
du cycle de formation d'Architectes  
de l'Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg

Epreuves écrites

EXPRESSION

2. 2 « *Illustration libre du même texte* »

Durée : 2 heures – Coefficient : 2

Cette épreuve prolonge et complète l'épreuve précédente (2. 1 « *Résumé de texte* ») en s'appuyant sur le même extrait « *L'allée* » du livre de Julien Gracq « *Au Château d'Argol* », Paris, éditions José Corti, p. 139 à 143.

Il est, cette fois, demandé aux candidats de l'interpréter librement, sur le format de papier mis à leur disposition (une seule face), en utilisant tous les moyens d'expression graphique appropriés – crayon, crayons de couleur, pastel, peinture, etc... à l'exclusion des techniques à séchage lent.

Si la liberté technique est réelle, il est cependant attendu des candidats qu'ils remarquent que le texte n'est pas seulement une description naturaliste, mais qu'il propose une perception qui va au-delà d'une approche visuelle. L'attention est donc attirée sur la **recherche de la restitution en deux dimensions des qualités spatiales spécifiques du paysage, ainsi que de l'univers mental proposé.**

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Examen ou Concours : \_\_\_\_\_ Série\* : \_\_\_\_\_

Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Épreuve/sous-épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_  
(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat

Né(e) le : \_\_\_\_\_

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

**Document-réponse à rendre en fin d'épreuve**

Réponse	A	B	C	D	E
Question					
1.1					
1.2					
1.3					
1.4					
2.1					
2.2					
2.3					
2.4					
3.1					
3.2					
3.3					
3.4					
3.5					
3.6					
4.1					
4.2					
4.3					
4.4					
5.1					
5.2					
5.3					
5.4					
5.5					
5.6					

SESSION 2006

Concours d'admission en première année du Cycle de formation d'Architectes  
de l'Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg

Epreuves écrites

EXPRESSION : RESUME DE TEXTE

Durée : 2 heures – Coefficient : 2

- I) Résumer en 180 à 200 mots le texte ci-après.
- II) Indiquer très synthétiquement en une ou deux phrases, quel est le thème central traité dans ce texte.
- III) Exposer en une dizaine de lignes maximum vos opinions propres autour du thème central que vous venez de repérer.

« L'ALLEE »

de Julien GRACQ

Extrait du livre « Au Château d'Argol » Pages 139 à 143, éditions José Corti.

Mais, cependant, leur crainte se dissipait à la radieuse clarté du jour. La surprenante lumière qui montait chaque matin des nappes d'eau claire de la rivière les attirait longuement, au travers d'un brouillard léger qui couvrait encore les hautes branches des arbres et, retombant sur eux en gouttelettes, semblait à leur visage mouillé la marque véritable du *baptême* d'une journée nouvelle, et comme l'onction même, rafraîchissante et délectable, du matin. Peu à peu les arbres sortaient confusément du brouillard et, comme dépouillés par un unique privilège de toute qualité particulièrement pittoresque, imposaient seulement à l'âme à peine éveillée la pure conscience de leur *volume* et de leur harmonieux foisonnement au sein d'un paysage où la couleur paraissait perdre entièrement son pouvoir ordinaire de localisation, et s'inscrivait seulement au bord de ces eaux calmes, pour l'œil débarrassé par miracle de ce que le travail ordinaire de la perception contient toujours de *réduction à l'absurde*, la conjonction apaisante et quasi divine du plan horizontal et de la sphère. Et la nature, rendue par la brume à son intime géométrie, devenait alors plus insolite que les meubles d'un salon revêtu de ses housses, substituant tout à coup à l'œil de l'intrus la menaçante affirmation de leur pur volume aux hideurs familières de la commodité, et restituant par une opération dont le caractère magique ne saurait échapper à quiconque aux instruments du plus humble usage, jusque-là ravalés à tout ce que le *maniement* peut comporter de bassement dégradant, la splendeur particulière et frappante de l'*objet*. Ils pénétraient dans cette forêt à tous égards vierge et parcouraient à pas lents ses nobles avenues. Et le soleil alors dépassait la cime des hautes montagnes, un souffle frais inclinait les arbres, et les eaux hérissées brillaient de mille feux, mais tout le jour le cerne bleuâtre d'un brouillard irisé baignait encore l'horizon et comme seulement tenu à distance par le rayonnement de ce couple lumineux. Incroyable était alors leur félicité, leurs inépuisables et absorbantes délices, et dans l'eau profonde de leurs yeux, au plus profond ils plongeaient comme de vigoureux nageurs et prolongeaient jusqu'au plus complet vertige la fixité de leurs regards insoutenables, où la glace

même des abîmes alternait avec la flamme atroce du soleil. Ils ne *pouvaient* se rassasier de leurs yeux inexorables, dévastants soleils de leurs cœurs, soleils humides, soleils de la mer, soleils jaillis trempés des abîmes, glacés et tremblants comme une gelée vivante où la lumière se fût faite chair par l'opération d'un sortilège inconcevable.

Au travers des arbres, ils suivirent un jour une avenue large et verte, recouverte à plus de cent pieds de haut par la voûte des branches, et dont le caractère étrange et immédiatement sensible à l'âme tenue en éveil par les perpétuelles embûches de la forêt consistait en ce que, courant à travers un paysage particulièrement vallonné, et dont elle épousait à chaque instant les moindres inflexions, néanmoins la *rigidité* de sa direction s'imposait clairement à l'œil au milieu de tous ces accidents naturels et venait découper à l'horizon dans la barre sombre des arbres et juste en face du promeneur un *cran* lumineux d'une netteté parfaite — suggérant à l'esprit obsédé par l'infranchissable rideau de la forêt l'image d'une porte ouverte sur un paysage entièrement inconnu, auquel l'obsédante rectitude de cette avenue, comme tracée à travers monts et vallées par un sauvage caprice, une volonté royalement dédaigneuse de toute difficulté, paraissait conférer un don de capitale attirance. Une autre cause de surprise résidait dans l'*exagération* indubitable de ses dimensions, qui laissaient entre les murailles glorieuses des hautes frondaisons des arbres l'espace d'une vraie clairière, couverte d'un tapis brillant de gazon, vaste et nue comme la scène vide d'un théâtre, et dont la colossale largeur semblait faite pour dévoiler longuement à l'âme les terreurs peu banales de l'*agoraphobie*. Et cependant, de quelque anormale urgence que témoignât la rectitude de cette tranchée où, comme si, dans une planète habitée par des géomètres fous, on eût considéré comme de première nécessité de peindre *d'abord* les méridiens sur le sol, le caractère de pure *direction* semblait sans la moindre idée de but se suffire à lui-même dans sa convaincante affirmation, Albert et Heide, en se retournant, n'en constatèrent pas moins avec malaise que l'avenue, à quelque distance derrière eux, graduellement envahie par l'extravagante végétation du sous-bois, abandonnait peu à peu sa majesté géométrique et se perdait en *impasse* dans la mer uniforme des arbres. Rien ne saurait donner une

idée de la puissance de suggestion de cette route ouverte pour l'âme seule au sein d'une forêt isolée du monde, et qui par la confondante ampleur de ses dimensions inutiles semblait rendre encore plus complète la solitude de ces lieux écartés. En ce moment, le soleil au bas de sa course brilla au milieu même de la tranchée que l'avenue ouvrait dans les arbres lointains de l'horizon et en remplit le théâtral vaisseau des flots d'une lumière dorée : la double colonnade des arbres, plus immobile qu'un rideau de feuilles reflété par une pièce d'eau, sembla s'écarter devant lui jusqu'au fond même du paysage et, comme sur une route ouverte dans la mer, et au milieu d'un silence plus somptueux que celui d'un palais vide, et qui paraissait tenir en suspens toutes choses dans l'instantané longuement retenu de son enchantement, Heide et Albert se mirent en marche au milieu de l'allée. Longtemps, par les heures déclinantes du jour, ils suivirent cette route à la rigidité implacable, se heurtèrent aux murailles étouffantes de leur destin.